Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints

Leçons : 151, 153, 154, 155, 158

Réf. Gourdon - Algèbre p244 (2^e édition)

Th. (spectral)

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint.
Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f.

Coro 1 :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Alors il existe $C \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale telles que $C^{-1} M C = {}^tC M C = D$

Coro. 2 :

Soit E un espace euclidien et q une forme quadratique sur E.
Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale.

Coro. 3 :

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq M est sym. déf ≥ 0 et N est symétrique.
Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale telles que ${}^tC M C = I_n$ et ${}^tC N C = D$

Remarque : Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Prendre un espace hermitien n'apporte rien aux démonstrations mais change légèrement les énoncés, où il faut inclure le cas " M est hermitienne "

Th. : rajouter " et les vp de f sont réelles "

Coro 1 : $C \in U_n(\mathbb{C})$ et " ... matrice diagonale réelle "

Coros 2 et 3 : " ... diagonale réelle "

et remplacer ${}^tC$ par $C^* = {}^t\overline{C}$

Th :

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante

(H_n) : Le théorème spectral est vrai pour tout espace euclidien E tq $\dim E \leq n$.

. si $n = 1$: c'est clair, et (H_1) est vérifiée.

. soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose (H_n) vérifiée. M.q. (H_{n+1}) est alors vérifiée.

Soit E un espace euclidien tq $\dim E \leq n+1$.

Si $\dim E \leq n$, alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence,

donc OPS $\dim E = n+1$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint

Méthode : • M.q. f admet une v.p. λ

• Soit x un $\vec{vp}$ associé à λ et $H := (\mathbb{R}x)^\perp$.

Alors $E = \mathbb{R}x \overset{\perp}{\oplus} H$, $\dim H = n$ et on utilise le fait que :

si F sev de E stable par f, alors $F^\perp$ stable par ${}^tf$.

1) Ecrire la fin du raisonnement

Si f admet une v.p. λ, soit $x \in E$ un $\vec{vp}$ de f associé à λ, tq $\|x\| = 1$

On pose $H = (\mathbb{R}x)^\perp$.

Alors $E = \mathbb{R}x \overset{\perp}{\oplus} H$, donc $\dim H = n \geq 1$

De plus, $\mathbb{R}x$ est stable par f, donc H est stable par ${}^tf = f$ (car f autoadjoint).

On a alors $f_{|F} = {}^tf_{|F}$, et par hyp. de récurrence, H admet une bon $(e_2 \ldots e_n)$ de $\vec{vp}$ de f.

$H = (\mathbb{R}x)^\perp$ donc $(x, e_2, \ldots e_n)$ est alors une bon de $\vec{vp}$ de f, et $\boxed{(H_{n+1}) \text{ est vérifiée.}}$

2) M.q. f admet une v.p.

. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto \langle x, f(y) \rangle$.

φ est une forme bili. sym. continue (car dim. finie), on note q sa forme quadratique.

. Soit $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$. S est fermé borné dans E de dim. finie donc S est compact. Par continuité de q sur E :

$\exists x_0 \in S, \lambda \in \mathbb{R}$ / $q(x_0) = \sup_{x \in S} q(x) = \lambda$.

. Soit q_1 la forme quadratique déf. sur E par $q_1(x) = \lambda \|x\|^2 - q(x)$.

$\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|} \in S$ donc $q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \lambda$
$q(x) \leq \lambda \|x\|^2$

donc $q_1(x) \geq 0$ et q_1 est positive.

On : $\begin{cases} q_1(x_0) = 0 \\ q_1 \geq 0 \end{cases}$ donc q_1 est dégénérée (car si $q \geq 0$, alors $\mathcal{C}_q = \operatorname{Ker} q$ où $\mathcal{C}_q$ est le cône isotrope de q)

. La forme polaire de q_1 est $\varphi_1 (x, y) \mapsto \langle x, g(y) \rangle$
où $g(y) = \lambda y - f(y)$, soit $g = \lambda \, Id_E - f$.

M.q. $\operatorname{Ker} g \neq \{0\}$.

φ_1 est dégénérée, donc :

$\exists x \in E \setminus \{0\}$ $\forall y \in E$, $\langle x, g(y) \rangle = 0$

donc g n'est pas surjective (sinon $x = g(y) \Rightarrow \|x\|^2 = 0$ avec $x \neq 0$)

donc g n'est pas injective (car E de dim. finie)

donc il existe $y \in E \setminus \{0\}$ $g(y) = 0$

soit $f(y) = \lambda y$.

Coro 1 :

On considère $E = \mathbb{R}^n$ muni du pdt scalaire usuel.

On peut alors voir M comme la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans la base canonique qui est une bon pour le pdt scalaire usuel.

f est donc autoadjoint. (pour le pdt scalaire usuel)

Par le th. spectral, il existe $\mathcal{B}'$ une bon tq $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = D$ où D est diagonale.

Soit $C = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

C transforme une bon en une bon donc $\boxed{C \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } {}^tC M C = D}$.

Coro 2 :

E esp. euclidien muni d'un pdt scalaire φ, q forme quadratique sur E.

Soit $\mathcal{B}$ une bon pour φ (en orthonormalisant une base quelconque de E par Gram-Schmidt par exemple)

Alors $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(q)$ est symétrique, et comme pour le corollaire 1, on peut la voir comme la matrice d'un endomorphisme de E autoadjoint (pour φ)

Alors, $\exists\, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, $\mathcal{B}'$ bon de E pour φ et $C = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $\boxed{{}^tC M C = D}$

Coro 3 : $E = \mathbb{R}^n$

Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(X, Y) \longmapsto {}^tX M Y$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donc la matrice dans la base canonique ($\mathcal{B}$) de $\mathbb{R}^n$ de φ qui est un produit scalaire. ($\mathcal{B}$ n'est pas une bon pour φ a priori)

Il existe donc $\mathcal{B}'$ base de E qui soit une bon pour φ (pas pour le pdt scalaire usuel a priori) (on peut obtenir $\mathcal{B}'$ en faisant Gram-Schmidt($\mathcal{B}$)).

Si on note $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Alors P transforme une base en une autre base donc $\boxed{P \in GL_n(\mathbb{R})}$

Rq : P transforme :

$\mathcal{B}$ qui est une bon pour le pdt scalaire usuel MAIS PAS pour φ

en $\mathcal{B}'$ qui est une bon pour φ MAIS PAS pour le pdt scalaire usuel.

P n'a donc aucune raison d'appartenir à $O_n(\mathbb{R})$

On a alors $\boxed{^tPMP = I_n}$

Or, $^tPNP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est toujours une matrice symétrique.

En appliquant cette fois le corollaire 1 :

$\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $\exists Q \in O_n(\mathbb{R})$ tq $^tQ(^tPNP)Q = D$.

On a alors :

$\boxed{^t(PQ)N(PQ) = D}$ et $^tQ(^tPMP)Q = {}^tQQ$ $Q \in O_n(\mathbb{R})$

$\boxed{^t(PQ)M(PQ) = I_n}$

En posant $C = PQ \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\boxed{^tCMC = I_n \text{ et } ^tCNC = D}$.